Dalle molecole alla finanza

Il moto browniano e le sue applicazioni alla finanza matematica.

di Carmelo Di Natale e Damiano Ricceri

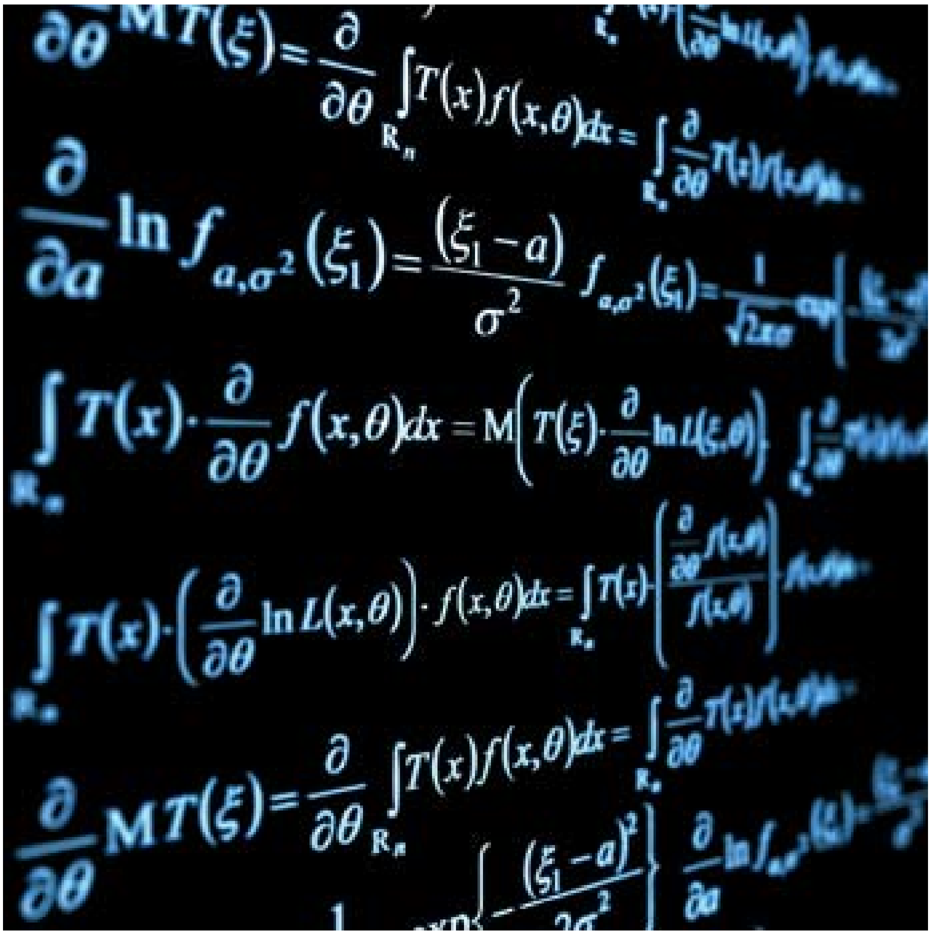

Foto: iStockphoto.com (enot-poloskun; Pannonia)

Nel lontano 1828 il botanico britannico Robert Brown, studiando una soluzione acquosa con pollini disciolti, si accorgeva che piccole particelle vegetali si agitavano nel liquido, movendosi di un moto vorticoso e caotico. Brown non seppe mai fornire una spiegazione scientifica, né tantomeno una descrizione matematica del fenomeno, ma la sua osservazione aprì la strada a un filone di ricerche che si è rivelato – e che continua a rivelarsi – estremamente fecondo sia dal punto di vista dei risultati teorici sia delle applicazioni: lo studio delle dinamiche browniane. Da allora, in suo onore, il termine moto browniano sta a indicare nella letteratura scientifica l'evoluzione frenetica, puramente stocastica, dei componenti elementari di un sistema fisico complesso il quale, però, si trova in una condizione di equilibrio (statico o dinamico) se visto come un tutto, ossia osservato su scale spaziali e temporali macroscopiche. Un esempio chiarirà la nozione decritta in termini formali. L'acqua presente in un bicchiere poggiato su un tavolo è sicuramente un sistema fisico in equilibrio: il corpo appare fermo in tutte le sue parti all'osservatore; tuttavia, se si fosse in grado di scrutare il liquido da distanze talmente piccole da distinguerne le molecole, ci si troverebbe di fronte a uno spettacolo degno di una pista di go-kart: le molecole si spostano a velocità elevate in tutte le direzioni, in modo del tutto casuale. Eppure l'acqua è ferma... Il moto browniano è proprio questo: sistemi in equilibrio macroscopico celano dinamiche microscopiche complesse. La trattazione matematica del moto browniano è piuttosto complessa (e peraltro relativamente recente), sia perché coinvolge strumenti analitici avanzati come equazioni differenziali alle derivate parziali, sia perché si utilizzano strumenti statistici nel trattare le dinamiche stocastiche dei componenti microscopici al fine di dedurre informazioni essenzialmente deterministiche su scale macroscopiche (procedimenti di questo tipo sono molto comuni in tutta la fisica matematica). In realtà la natura è intrisa di moti browniani: sono trattabili tramite modelli legati al moto browniano un numero enorme di fenomeni fisici interessanti, dalla diffusione di un gas al riscaldamento di una sbarra di metallo, fino alle dinamiche delle popolazioni. In potenza, qualunque situazione in cui l'evoluzione macroscopica è dipendente da una grande varietà di fattori indipendenti e casuali può essere descritta o quantomeno approssimata da un approccio di questo tipo.

La cosa estremamente interessante è che anche la finanza è un immenso, vorticosissimo moto browniano! A pensarci bene, infatti, tanto l'evoluzione dei prezzi dei beni di consumo quanto l'andamento temporale di strumenti finanziari complessi quali derivati finanziari o titoli di cartolarizzazione è funzione di un numero molto alto di parametri elementari indipendenti (diversi di volta in volta) i cui valori sono sostanzialmente casuali. Particolarmente illuminante da questo punto di vista è il comportamento di uno strumento finanziario derivato. I derivati sono infatti titoli finanziari che dipendono da un paniere di parametri sottostanti la cui evoluzione è puramente stocastica: uno strumento del genere segue in modo naturale una dinamica di tipo browniano.

Vediamo più in dettaglio un esempio concreto di applicazione di questi approcci modellistici a un tipo particolarmente semplice di prodotti finanziari, le opzioni *put* e *call*. Questi sono contratti che vincolano due attori economici, detti possessore e sottoscrittore, a comprare o vendere a una determinata scadenza futura un opportuno bene S a un prezzo stabilito. Supponiamo, per fissare le idee, che il contratto

sia stipulato al tempo $t=0$: le differenti caratteristiche di *put* e *call* emergeranno solo al tempo T fissato che rappresenta da un punto di vista economico la data di scadenza dello strumento. A questo tempo infatti, nel caso del *put,* il possessore potrà decidere se vendere il bene di riferimento al prezzo d'esercizio, ossia al prezzo stabilito per contratto al tempo zero; in tal caso il sottoscrittore è obbligato a comprare. Al contrario, nel caso di *call*, il possessore ha il diritto di scegliere se comprare e il sottoscrittore è vincolato a vendere. Notiamo che in entrambi i casi è il possessore a dettare le regole del gioco (non è nemmeno obbligato all'esercizio dell'opzione), in quanto il sottoscrittore si deve adeguare a ciò che il primo ha deciso; questo fatto ha ovviamente un prezzo per il possessore, che deve essere pagato subito alla stipula dell'accordo e che viene chiamato in gergo *valore* d'azione. Esso è in genere indicato con V e dipende dal tempo t e dal prezzo del bene di riferimento S. L'obiettivo che la modellistica matematica si pone è allora quello di determinare l'evoluzione temporale di V in modo coerente con le regole del mercato. A tal fine una delle tecniche più usate è il celebrato metodo di Black-Scholes (che ha meritato il Premio Nobel per l'economia ai due studiosi dai quali prende il nome), il quale si basa essenzialmente sull'assunzione di un preciso modello evolutivo per S e su un principio generale di buon funzionamento dei mercati chiamato *impossibilità di arbitraggio*. Esso, matematicamente, traduce l'ipotesi che, a seguito dell'investimento di una certa somma q in assenza di rischio e con un tasso di interesse pari a r, si otterrà in un tempo molto piccolo dt un incremento pari a $r \cdot q \cdot dt$. È intuitivo capire che S non può evolvere in maniera deterministica, in quanto ci possono essere modifiche "improvvise" del prezzo che sarebbero incompatibili in un modello non stocastico e che invece vanno tenute in conto. Altrettanto importante per il modello è la premessa di piena efficienza del mercato, che si esplica essenzialmente nel fatto che questo risponda in modo dinamico alle informazioni esterne che – come detto – possono variare improvvisamente. Questo set di ipotesi (ragionevoli) determinano per S un'evoluzione spiccatamente browniana. Come in ogni problema di modellistica matematica, una volta fissate sullo sfondo le ipotesi, bisogna passare alle formule, ossia occorre utilizzare gli strumenti tecnici a disposizione del matematico (tipicamente le equazioni differenziali) per ottenere una descrizione quantitativa più precisa possibile del sistema, in questo caso della grandezza V. L'equazione differenziale che descrive questo semplice modello, nota appunto come equazione di Black-Scholes, è:

$$dS/S = \mu dt + \sigma dW_t$$

In questa equazione dS/S indica il cambiamento relativo di prezzo ottenuto dividendo il differenziale di S per lo stesso S, μ è il cosiddetto *drift* del bene ossia il suo incremento medio, mentre il coefficiente σ è detto volatilità e serve a misurare la deviazione del rendimento dall'attesa. Il termine W_t è una funzione del tempo che tiene conto della fondamentale ipotesi di impossibilità di arbitraggio. I termini differenziali dS, dt e dW_t indicano incrementi infinitesimi (piccolissimi) delle grandezze che rappresentano. L'equazione di Black-Scholes dipende da parametri statistici ed è un esempio di equazione differenziale stocastica. Tutti i problemi browniani sono modellizzati tramite equazioni stocastiche come questa. L'equazione di Black-Scholes è stata ampiamente studiata e può essere risolta; ciò permetterebbe di fare ulteriori considerazioni di natura sia matematica sia economica sul modello in esame, ma di questo non ci occuperemo...